Exercices sur les suites (1ères Techno)

1 Généralités : calculs de termes, mode de définition (explicite, récurrente), représentation graphique, sens de variation

Exercice nº 1 (corrigé ci après)
Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n + 2$.

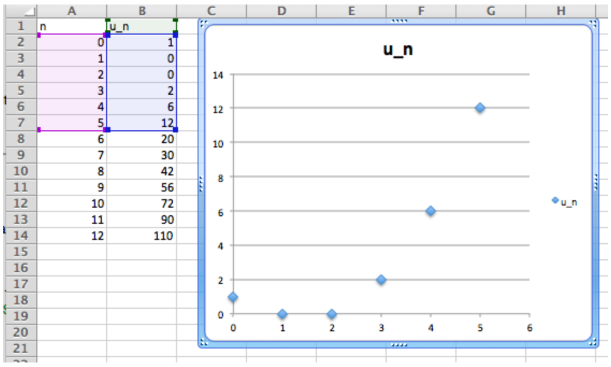
1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Peut-on calculer u_{100} directement ?
3. La suite est-elle définie de façon explicite ou récurrente ?
4. Dans la feuille de calcul ci-dessous, quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 pour obtenir, par extension vers le bas, les termes de la suite ?

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	2	
3	1	=	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

5. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
6. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite u .
7. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et démontrer la conjecture précédente.

Corrigé :

1. Calcul de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 :
   Point méthode : pour calculer les termes d'une suite définie seulement en fonction de n (sans faire appel à u_{n-1}, ni aucun terme de la suite) il suffit de remplacer n successivement par les valeurs des indices 0, 1, 2, 3, ... Tout se passe comme si on avait une fonction u qui à une variable n associe $u(n)$ et $u(n)$ est l'image de n par la fonction u.
   on a $u_0 = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2$
   $u_1 = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$
   $u_2 = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$
   $u_3 = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2$
   $u_4 = 4^2 - 3 \times 4 + 2 = 6$
   $u_5 = 5^2 - 3 \times 5 + 2 = 12$
2. Oui, on calculer u_{100} directement en donnant à n la valeur 100 : $u_{100} = 100^2 - 3 \times 100 + 2 = 702$
3. La suite est définie de façon explicite.
4. On peut entrer dans la cellule B3 la formule «=A3^2 - 3*A3+2».
5. Représentation :



	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0
4	2	0
5	3	2
6	4	6
7	5	12
8	6	20
9	7	30
10	8	42
11	9	56
12	10	72
13	11	90
14	12	110

6. La suite u semble strictement croissante à partir des termes d'indice $n = 2$.
7. Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 3(n+1) + 2 - (n^2 - 3n + 2) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 2 - n^2 + 3n - 2 \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

   Si $n \geq 2$, $2n - 2 > 0$ donc pour $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ ce qui montre que la suite u est strictement croissante à partir de l'indice $n = 2$.

Exercice n° 2

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n+1} - 1$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Peut-on calculer u_{100} directement ?
3. La suite est-elle définie de façon explicite ou récurrente ?
4. Dans la feuille de calcul ci-dessous, quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 pour obtenir, par extension vers le bas, les termes de la suite ?

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	2	
3	1	=	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

5. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
6. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite u .
7. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et démontrer la conjecture précédente.

Exercice n° 3 (corrigé)

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = -3u_n + 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Peut-on calculer u_{100} directement ?
3. La suite est-elle définie de façon explicite ou récurrente ?
4. Dans la feuille de calcul ci-dessous, quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 pour obtenir, par extension vers le bas, les termes de la suite ?

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	2	
3	1	=	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

5. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
6. La suite u est-elle monotone ?

Corrigé

1. Calcul de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 :

   Point méthode : Pour calculer les termes d'une suite définie de façon récurrente (le calcul d'un terme fait appel à des valeurs de termes précédents) il suffit de remplacer n successivement par les valeurs des indices 0, 1, 2, 3, ... Ici, dans les expressions obtenues, on aura u_1 en fonction de u_0 ; u_2 en fonction de u_1 ; u_3 en fonction de u_2...

   Comme $u_0 = 1$, on a $u_{0+1} = -3u_0 + 2$ soit $u_1 = -3 \times 1 + 2 = -1$

   $u_{1+1} = -3u_1 + 2$ soit $u_2 = -3 \times (-1) + 2 = 5$

   $u_3 = -3u_2 + 2 = -3 \times 5 + 2 = -13$

   $u_4 = -3u_3 + 2 = -3 \times (-13) + 2 = 41$

   $u_5 = -3u_4 + 2 = -3 \times 41 + 2 = -121$.
2. On ne peut pas calculer u_{100} directement puisqu'il faut connaître u_{99} pour le calcul.
3. La suite est définie de façon récurrente ?
4. Dans la feuille de calcul, on entrer dans la cellule B3 pour obtenir, par extension vers le bas, les termes de la suite la formule «=-3*B2+2».
5. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
6. La suite u n'est pas monotone puisqu'il y a alternance des signes et ($u_0 > u_1 < u_2$).

Exercice n° 4

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 2$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Peut-on calculer u_{100} directement ?
3. La suite est-elle définie de façon explicite ou récurrente ?
4. Dans la feuille de calcul ci-dessous, quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 pour obtenir, par extension vers le bas, les termes de la suite ?

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	2	
3	1	=	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

5. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
6. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite u .

Exercice n° 5

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 2$.

1. La suite est-elle définie de façon explicite ou récurrente ?
2. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
3. Proposer une expression explicite pour u_n.

Exercice n° 6

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 10u_n - 9n + 8$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Proposer une expression explicite pour u_n.

Exercice n° 7

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \dfrac{(n+1)u_{n-1} + 1}{n}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Proposer une expression explicite pour u_n.

Exercice n° 8 (Tableur)

PARTIE A

En 2019, le stock de cabillaud au large des côtes d'un littoral était estimé à 5 000 tonnes.

En raison de la surpêche, ce littoral a vu le stock de cabillaud diminuer sensiblement aux abords des côtes.

Les autorités locales souhaitent réglementer la pêche de cabillaud pour éviter la disparition de cette espèce dans ce littoral et fixe à 600 la masse, en tonnes, de cabillaud pouvant être pêchés en 2019. Les autorités imposent que la masse, en tonnes, de cabillaud pouvant être pêché diminue de 30 chaque année à partir de 2019.

On note m_n la masse, en tonnes, de cabillaud pouvant être pêché dans ce littoral en $(2019 + n)$. Ainsi, $m_0 = 600$.

1. Calculer m_1 la masse, en tonnes, de cabillaud pouvant être pêché dans ce littoral en 2020.
2. Calculer m_2 la masse, en tonnes, de cabillaud pouvant être pêché dans ce littoral en 2021.
3. Quelle est la nature de la suite m ?
4. Donner l'expression de m_n en fonction de n.
5. Calculer m_{10} et interpréter le résultat dans le contexte.
6. On souhaite créer une feuille de calcul calculant la quantité maximale pouvant être pêchée par an ainsi que la masse totale maximale ayant pu être pêchée depuis 2019.

	A	B	C
1	n	Masse annuelle maximale m pêchée (en tonnes)	Masse totale maximale pêchée depuis 2019
2	0	600	600
3	1	570	1170
4	2	540	1710
5	3	510	2220
6	4	480	2700
7	5	450	3150
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		
13	11		
14	12		

   (a) Quelle formule, entrée en B3 et étirée vers le bas permet d'obtenir les termes de la suite m générée dans la colonne B ?

   (b) Quelle formule, entrée en C3 et étirée vers le bas permet d'obtenir la masse totale maximale pêchée depuis 2019.

7. Compléter les cellules de la plage B8 :C14 grâce à un tableur ou une calculatrice.
8. Quelle masse totale maximale sera pêchée entre 2019 et 2029 (inclus) ?

PARTIE B

En réalité, quand des quotas de pêches sont instaurés, la population de cabillauds augmente de 12% par an. Les autorités locales décident de fixer à 500 la masse, en tonnes, de cabillaud pouvant être pêchés chaque année à partir de 2019 (l'augmentation de la population précède la saison de pêvhe).

On note c_n la masse, en tonnes, de cabillaud présent dans ce littoral en $(2019 + n)$. Ainsi, $c_0 = 5\,000$.

1. Démontrer que la masse c_1, en tonnes, de cabillaud présent dans ce littoral en 2020 est $c_1 = 5\,100$.
2. Calculer c_2 la masse, en tonnes, de cabillaud présent dans ce littoral en 2020.
3. Quelle est la nature de la suite c ?
4. Donner l'expression de c_n en fonction de n.
5. Calculer c_{10} et interpréter le résultat dans le contexte.

Exercice n° 9 (Répartition d'une population et exode rural (corrigé))

Dans une région comptant 96 000 habitants en 2017,64 000 habitent à la campagne et 32 000 en ville.

On suppose dans ce modèle que la population totale de la région reste stable égale à 96 000 habitants toute la durée de l'étude (à savoir au moins 100 ans).

On constate que tous les ans, 16% des ruraux deviennent citadins et que 4% des citadins deviennent ruraux.

On veut prévoir l'évolution de la répartition (ruraux/citadins) afin de de construire des logements, écoles et infrastructures en nombres adaptés.

On note (c_n) le nombre d'habitants vivant à la campagne dans cette région l'année $(2017 + n)$ et (v_n) le nombre d'habitants vivant en ville dans cette région l'année $(2017 + n)$.

1. Donner les valeurs de c_0 et v_0.
2. Calculer c_1, v_1, c_2 et v_2. *On arrondira les résultats à l'unité.*
3. La suite c est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. La suite v est-elle arithmétique ? géométrique ?
5. On cherche à prévoir la répartition des habitants de cette région sur le long terme en supposant que les flux de populations restent constants. Pour cela, on crée une feuille de calcul :

	A	B	C	D
1	n	c_n	v_n	
2	0	64000	32000	
3	1	55040	40960	
4	2	47872	48128	
5	3	42138	53862	
6	4	37550	58450	
7	5	33880	62120	
8	6	30944	65056	
9	7	28595	67405	
10	8	26716	69284	
11	9	25213	70787	
12	10	24010	71990	
13	11	23048	72952	
14	12	22279	73721	
15	13	21663	74337	
16	14	21170	74830	
17	15	20776	75224	
18	16	20461	75539	
19	17	20209	75791	
20	18	20007	75993	
21	19	19846	76154	
22	20	19717	76283	
23	21	19613	76387	
24	22	19531	76469	
25	23	19464	76536	
26	24	19412	76588	
27	25	19369	76631	
28	26	19335	76665	
29	27	19308	76692	
30	28	19287	76713	
31	29	19269	76731	
32	30	19255	76745	

(a) Quelle formule peut-on saisir en B3 puis en C3 afin de générer les termes des suites c et v après étirement vers le bas ?

(b) Comment se répartissent à terme les populations ? (stabilisation des populations urbaine et rurale ? désertification des campagnes ?)

(c) Déterminer grâce au tableur une valeur n_0 de n telle que $v_{n_0} = 76\,800$. Calculer alors c_{n_0} puis v_{n_0+1} et c_{n_0+1}. Que peut-on dire des suites (v_n) et (c_n) à partir du rang n_0 ?

Exercice nº 10 (Corrigé de l'exercice concernant la répartition d'une population et exode rural)

Dans une région comptant 96 000 habitants en 2017,64 000 habitent à la campagne et 32 000 en ville.
On suppose dans ce modèle que la population totale de la région reste stable égale à 96 000 habitants toute la durée de l'étude (à savoir au moins 100 ans).
On constate que tous les ans, 16% des ruraux deviennent citadins et que 4% des citadins deviennent ruraux.
On veut prévoir l'évolution de la répartition (ruraux/citadins) afin de de construire des logements, écoles et infrastructures en nombres adaptés.
On note (c_n) le nombre d'habitants vivant à la campagne dans cette région l'année $(2017+n)$ et (v_n) le nombre d'habitants vivant en ville dans cette région l'année $(2017+n)$.

1. On a, d'après l'énoncé, $c_0 = 64\,000$ et $v_0 = 32\,000$.
2. Comme 16% des ruraux partent l'année 0, il reste 84% des ruraux à la campagne l'année 1 et comme cette population rurale accueille 4% de ceux qui étaient citadins l'année 0, on a :

$$c_1 = 0,84 * c_0 + 0,04 * v_0 = 55\,040$$

Pour le calcul de v_1, le plus simple est de calculer $96\,000 - c_1$ puisque la population totale reste stable.
On peut aussi effectuer $v_1 = 0,96 * v_0 + 0,16 * c_0 = 40\,960$ (96% des citadins le restent et 16% des ruraux deviennent citadins).
De même :

$$c_2 = 0,84 * c_1 + 0,04 * v_1 = 47\,872 \quad \text{et} \quad v_2 = 96\,000 - c_2 = 48\,128$$

3. On a $c_1 - c_0 = -8\,960$ et $c_2 - c_1 = -7\,168$ donc la différence de termes consécutifs n'est pas constante : la suite c n'est pas arithmétique ?
On a $c_1/c_0 = 0,86$ et $c_2/c_1 = 0,87$ donc le quotient de termes consécutifs non nuls n'est pas constant : la suite c n'est pas géométrique ?
4. On a $v_1 - v_0 = 8\,960$ et $v_2 - v_1 = 7\,168$ donc la différence de termes consécutifs n'est pas constante : la suite v n'est pas arithmétique ?
On a $v_1/v_0 = 1,28$ et $v_2/v_1 = 1,175$ donc le quotient de termes consécutifs non nuls n'est pas constant : la suite v n'est pas géométrique ?
5. (a) En B3, on peut saisir : «=0,84*B2+0,04*C2» puis en C3 : «=96000-B3».
(b) À terme les populations semblent avoir une répartition stable : 19 200 habitants en campagne et 76 800 en ville.
(c) Grâce au tableur on lit que $n_0 = 52$ puisque $v_{51} = 76799$ et $v_{52} = 76\,800$.
On a alors $c_{52} = 96\,000 - 76\,800 = 19\,200$.
Il vient :

$$v_{53} = 0,96 * v_{52} + 0,16 * c_{52} = 76\,800 = v_{52}$$

et

$$c_{53} = 0,84 * c_{52} + 0,04 * v_{52} = 19\,200$$

Les suites (v_n) et (c_n) semblent constantes à partir du rang $n_0 = 52$.

Exercice nº 11 (Plan de carrière)

Une personne se voit proposer des offres d'emploi dans trois entreprises. Les conditions salariales sont les suivantes :

— Entreprise 1 : Un salaire mensuel de 2 100 euros la première année et chaque année, le salaire mensuel subit une augmentation de 60 euros ;

— Entreprise 2 : Un salaire mensuel de 1 800 euros la première année et chaque année, le salaire mensuel subit une augmentation de 2,5% ;

— Entreprise 3 : Un salaire mensuel de 2 300 euros la première année et chaque année, le salaire mensuel subit une augmentation de une augmentation de 1% sur le salaire mensuel de l'année précédente puis il y est ajouté 20 euros.

On note respectivement u_n, v_n et w_n les salaires mensuels proposés par les entreprises 1, 2 et 3 la n-ième année de travail après l'embauche. Ainsi, $u_1 = 2\,100$, $v_1 - 1\,800$ et $w_1 = 2\,300$.
On étudie l'évolution des salaires et leur cumul sur une carrière complète (42 ans).

PARTIE A

1. Pour l'entreprise 1 :
   (a) Calculer u_2 et u_3.
   (b) Donner la nature de la suite u.
   (c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (d) Exprimer u_n en fonction de n.
   (e) Calculer u_{42} et interpréter cette valeur.
2. Pour l'entreprise 2 :
   (a) Calculer v_2 et v_3.
   (b) Donner la nature de la suite v.
   (c) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n.
   (e) Calculer v_{42} et interpréter cette valeur.
3. Pour l'entreprise 3 :
   (a) Calculer w_2 et w_3.
   (b) La suite w est-elle arithmétique ? Géométrique ? (Justifier par le calcul.)

PARTIE B

On va utiliser une feuille de calcul pour comparer la progression des salaires et leur cumul sur toute la carrière.

I6

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	u_n	Cumul des salaires (entreprise 1)	v_n	Cumul des salaires (entreprise 2)	w_n	Cumul des salaires (entreprise 3)	
2	1	2100	25200	1800	21600	2300	27600	
3	2	2160	51120	1845	43740	2343	55716	
4	3	2220	77760	1891,125	66433,5	2386,43	84353,16	
5	4	2280	105120	1938,40313	89694,3375	2430,2943	113516,6916	
6	5	2340	133200	1986,8632	113536,6959	2474,59724	143211,8585	
7	6	2400	162000	2036,53478	137975,1133	2519,34322	173443,9771	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

1. Indiquer les formules saisies dans les cellules B3, D3 et F3. Les saisir puis les étirer jusqu'à la ligne 43.
2. Dans la cellule C2, on a saisi : «=B2*12». À quoi correspond ce calcul ?
3. Dans la cellule C3, saisir puis étirer jusqu'à la ligne 43 la formule : «=C2 + B3*12».
4. Quelle valeur contient la cellule C43 ? Interpréter le résultat.
5. En vous inspirant des formules saisies en C2 et C3, remplir les colonnes E et G.
6. Déterminer l'entreprise à choisir pour :
   (a) gagner le plus rapidement possible un salaire mensuel supérieur ou égal à 3 000 euros.
   (b) obtenir un cumul des salaires sur 42 ans le plus élevé.
   (c) obtenir une moyenne des salaires des 25 dernières années de travail la plus élevée possible (afin de maximiser sa retraite).

Exercice n° 12 (Suite homographique)

Soit u la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 6$ et donc que la suite u est bien définie.

1. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que la suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n.
   On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 3$ et donc que la suite v est bien définie.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Conjecturer la nature de la suite v et sa raison.
   (c) Démontrer les conjectures précédentes et calculant $v_{n+1} - v_n$.

Exercice nº 13
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. La suite u est-elle monotone ? (croissante ? décroissante ?)
3. Vérifier que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4. On pose $v_n = u_n - 4n + 10$ pour tout entier naturel n.
   On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 3$ et donc que la suite v est bien définie.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_3 et v_4.
   (b) Conjecturer la nature de la suite v et sa raison.
   (c) Démontrer les conjectures précédentes et exprimant v_{n+1} en fonction de v_n.

2 Suites arithmétiques

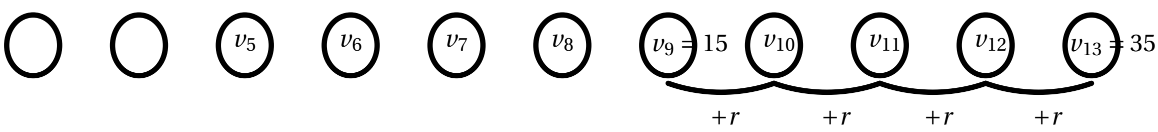
Exercice nº 14 (oral)
Calculer v_2, v_3 et v_4 pour la suite v arithmétique de terme initial $v_1 = 1\,000$ et de raison $r = -6$.

Exercice nº 15 (oral)
Calculer v_2, v_3 et v_4 pour la suite v arithmétique de terme initial $v_1 = -6$ et de raison $r = 1\,000$.

Exercice nº 16 (exo)
Soit v la suite arithmétique telle que $v_9 = 15$ et $v_{13} = 35$.

1. Calculer la raison r de cette suite.
2. Calculer v_0.

indication : faire un schéma (à traduire en équation...) !



Exercice nº 17
Soit v la suite arithmétique de terme initial $v_0 = -14$ et de raison $r = 5$.

1. Donner le sens de variation de v.
2. Calculer l'indice du premier terme positif.
3. Calculer v_{50}.

Exercice nº 18
Soit v la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = n^2 + 3$.

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.

3. La suite semble-t-elle arithmétique ?
   Indication : se rappeler de ce qu'ont de remarquable les points représentant une suite arithmétique.
4. Démontrer que la suite n'est pas arithmétique.
   Point méthode : Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. Ainsi, si $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$, la suite v n'est pas arithmétique.
   On peut aussi bien sûr calculer $v_{n+1} - v_n$ et montrer que c'est une quantité qui dépend de n et n'est donc pas constante.

Exercice n° 19
Soit w la suite définie pour tout entier naturel n, par $w_n = 4n + 3$.

1. Calculer w_0, w_1 et w_2.
2. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
3. La suite semble-t-elle arithmétique au vu de la représentation graphique ? (Justifier.)
4. Démontrer que la suite est arithmétique et préciser sa raison.
5. Préciser le sens de variation de w.

3 Suites géométriques

Exercice n° 20 (oral)
Calculer v_2, v_3 et v_4 pour la suite v géométrique de terme initial $v_1 = 1\,000$ et de raison $r = 0,5$.

Exercice n° 21 (oral)
Calculer v_2, v_3 et v_4 pour la suite v de terme initial $v_1 = -1\,000$ et de raison $r = 2$.

Exercice n° 22 (oral)
Soit v la suite géométrique telle que $v_4 = 5$ et $v_6 = 45$.

1. Calculer la raison q de cette suite.
2. Calculer v_0.

Exercice n° 23
Soit v la suite géométrique de terme initial $v_0 = 100\,000$ et de raison $q = 0,5$.

1. Donner le sens de variation de v.
2. Calculer v_4.
3. Calculer l'indice du premier terme inférieur à 1.

Exercice n° 24
Soit z la suite définie pour tout entier naturel n, par $z_n = (n+3)^2$.

1. Calculer z_0, z_1 et z_2.
2. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
3. La suite semble-t-elle géométrique ?
4. Démontrer que la suite n'est pas géométrique.

Exercice n° 25
Soit t la suite définie pour tout entier naturel n, par $t_n = 3^n$.

1. Calculer t_0, t_1 et t_2.
2. Représenter graphiquement les termes de la suite calculés à la question 1.
3. Démontrer que la suite est géométrique et préciser sa raison.
4. Préciser le sens de variation de t.

Exercice n° 26
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à l'entier.
On étudie la population d'un département. En 2019, la population de ce département est estimée à 1 500 000 habitants. On la note p_0.
On prévoit que le taux naturel d'accroissement de cette population est de $1,3\%$ par an et que, de plus le flux migratoire (la différence entre le nombre de personnes qui emménagent dans le département et celles qui en partent) est positif et est de +1 300 personnes.
Dans le modèle étudié, on suppose que ces données resteront constantes jusqu'en 2050.

1. Justifier que, sous les hypothèses considérées, la population de ce département s'élèvera à 1 520 800 en 2020. On note p_1 cette population.
2. Justifier que, sous les hypothèses considérées, la population de ce département s'élèvera à 1 541 870 en 2021. On note p_2 cette population.
3. Calculer, sous les hypothèses considérées, la population p_3 de ce département en 2022.
4. Calculer, sous les hypothèses considérées, la population $p_1 1$ de ce département.
5. En quelle année, sous les hypothèses considérées, la population dépassera 2 000 000.
6. Soit p_n la population de ce département en $(2019+n)$. Proposer une formule de récurrence donnant p_{n+1} en fonction de p_n.

Exercice n° 27 (Placements à intérêts composés)
Un capital de 4 000 euros est placé à 2% par an à intérêts composés (ce qui signifie qu'à la fin de chaque année, les intérêts sont calculés sur la capital disponible sur le compte au 31 décembre et viennent s'ajouter au capital) à la naissance d'un enfant en 2000. On suppose qu'aucun retrait ni versement n'est effectué sur toute la période d'étude.
On modélise le capital disponible sur le compte par une suite C. On pose $C_0 = 4\,000$.

1. Calculer le montant des intérêts calculés le 31décembre 2000 et en déduire le capital C_1 disponible sur le compte au 1er janvier 2001.
2. Calculer le montant des intérêts calculés le 31décembre 2001 et en déduire le capital C_2 disponible sur le compte au 1er janvier 2002.
3. La suite C est-elle arithmétique ?
4. Compléter : «Augmenter une quantité de 2% revient à la multiplier par ....».
5. Quelle est la nature de la suite C ? Préciser sa raison q.
6. Écrire une expression permettant de calculer C_{n+1} en fonction de C_n.
7. Proposer une expression de C_n en fonction de n.
8. Calculer C_{18} et interpréter le résultat.
9. Quel est le sens de variation de la suite C ?
10. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $C_n \geq 10\,000$.

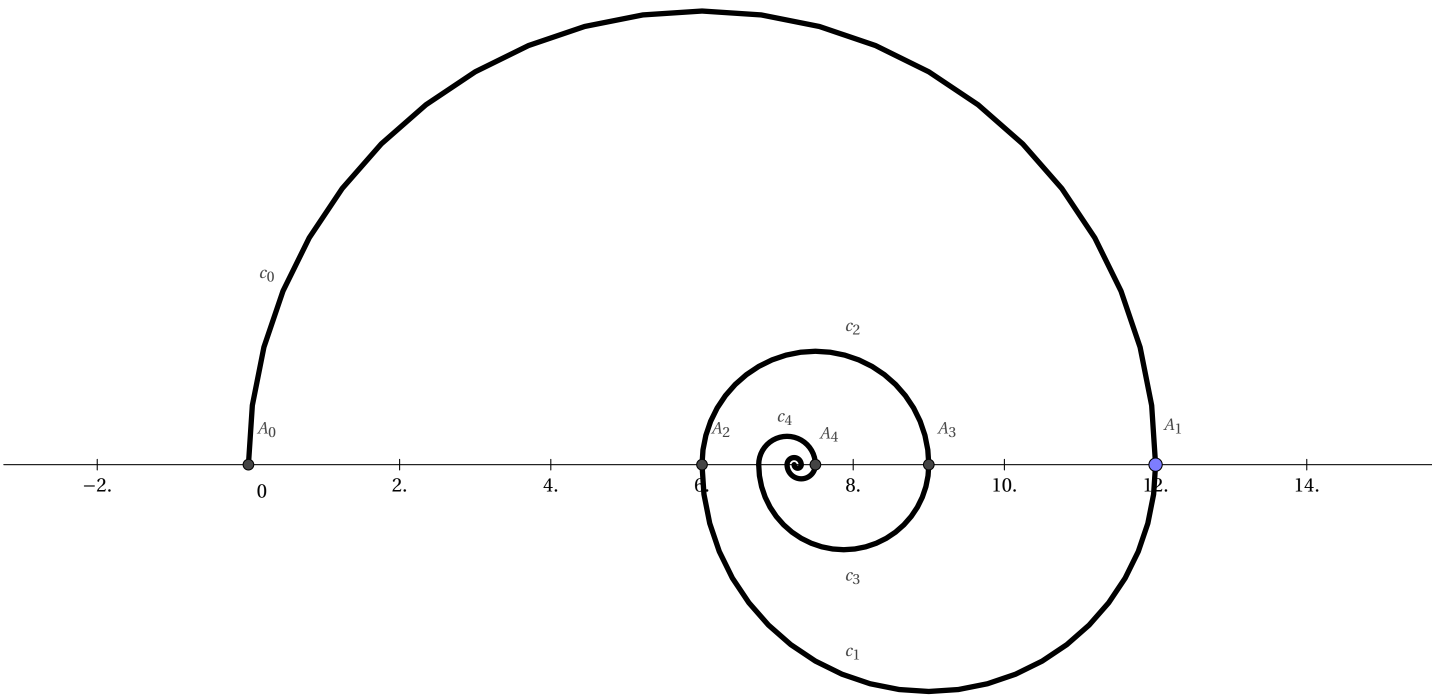
Exercice n° 28 (Datation de fossiles au carbone 14)
On étudie ici la désintégration du carbone 14 et son utilisation pour la datation des fossiles.
Soient c_0, c_1 et c_n le nombre d'atomes de carbone 14 respectivement à l'instant de la mort d'un végétal ou d'un animal, un siècle après et n siècles après.
On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue d'environ $1,24\%$ par siècle. Le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la Terre est considéré constant (ce qui est légitime au vu de la lenteur de la désintégration du carbone 14). À la mort d'un être vivant (végétal ou animal), l'assimilation du carbone 14 cesse et celui-si se désintègre.

1. Quelle est la nature de la suite c ? Préciser sa raison.
2. Un squelette d'un homme contient 5% du carbone 14 initial. Justifier que la mort de cet homme remonte à environ 24 000 ans.
3. Le fossile d'un être marin contient 8% du carbone 14 initial. Donner une estimation de l'instant auquel la mort de cet être marin est survenue.

Exercice n° 29 (Jardin en spirale)
Un paysagiste doit créer un jardin dans lequel seront plantés des arbustes disposés en spirale. Afin de prévoir le nombre d'arbustes à acheter, la longueur de la spirale doit être évaluée.
Cette spirale est constituée de la manière suivante, l'unité de longueur étant le mètre. :

- On donne deux points A_0 et A_1 tels que $A_0A_1 = 120$ mètres.
- Le diamètre $[A_0A_1]$ du demi-cercle $\mathscr{C}_0$ a pour milieu A_2.
- Le diamètre $[A_1A_2]$ du demi-cercle $\mathscr{C}_1$ a pour milieu A_3.
- ...

On construit ainsi une suite de demi-cercles (c_n) où n est n entier naturel.
On désigne par ℓ_n la longueur du demi-cercle c_n et L_8 la longueur totale de la spirale constituée des 8 demis-cercles.



1. Calculer ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les longueurs des quatre demi-cercles c_0 à c_3.
2. Exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n.
3. En déduire la nature de la suite ℓ et sa raison.
4. Calculer les termes de ℓ d'indice 4 à 7.
5. Calculer $L = \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 + \ell_7$. On donnera le résultat arrondi à un décimètre prés.
6. En considérant que le paysagiste plante un arbuste tous les 50 cm, combien doit-il acheter de plants pour ce massif en spirale ?

Exercice n° 30 (Flocon de Von Koch)
On part d'un triangle équilatéral de côté 9 cm (étape 1)
On divise chacun des côtés en 3 segments égaux puis l'on construit à l'extérieur du triangle initial un triangle équilatéral dont la base est le segment médian et l'on efface ce dernier (étape 2).

On itère le processus sur chacun des côtés de la figure pour obtenir les étapes suivantes (seules les étapes 1, 2 et 3 sont représentées). La figure que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment de fois le processus est appelé le flocon de Von Koch.

1. (a) Soit c_n le nombre de côtés de la figure à l'étape n. Donner les valeurs de c_1, c_2, c_3 et c_4.
   (b) Quelle est la nature et la raison de la suite c ?
2. (a) Soit ℓ_n la longueur d'un côté de la figure à l'étape n. Donner les valeurs de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et ℓ_4.
   (b) Quelle est la nature et la raison de la suite ℓ ?
3. (a) Soit p_n le périmètre de la figure à l'étape n. Déduire de la question précédente les valeurs de p_1, p_2, p_3 et p_4.
   (b) Quelle est la nature et la raison de la suite p ?
4. (a) Soit T_n le nombre de petits triangles ajoutés à l'étape n. Par convention, on pose $T_1 = 1$. Donner les valeurs de T_2, T_3 et T_4.
   (b) Quelle est la nature et la raison de la suite T ?